**Розділ 1. ЙМОВІРНОСТІ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ**

## Задачі на знаходження ймовірності події

## ЗАДАЧА 1

У скриньцi є 2 синi, 5 чорних та 3 бiлi кульки однакового розмiру. Яка ймовiрнiсть того, що взята навмання кулька буде бiлою?

**РОЗВ’ЯЗАННЯ**

Усього кульок у скриньцi: n = 10. Позначимо подiю: A — взяли бiлу кульку. Появi цiй подiї сприяє тiльки наявність бiлих кульок. Таких кульок: m = 3.

Отже, ймовiрнiсть подiї A: P(A) = m/n = 3/10 = 0,3  
***Вiдповiдь***. 0,3.

**ЗАДАЧА 2**

У колодi 36 гральних карт. Яка ймовiрнiсть того, що навмання взята карта, буде червоної мастi?

**РОЗВ’ЯЗАННЯ**

Усього карт у колодi: n = 36. Позначимо подiю: B — взяли карту червоної мастi. Появi цiй подiї сприяють бубновi та чирвовi карти.

Таких карт у колодi: m = 18.

Отже, ймовiрнiсть подiї B:  P(B) = m/n = 18/36 = 0,5  
***Вiдповiдь***. 0,5.

**Задачі на факторіал**

### ЗАДАЧА 1

Скiльки п’ятизначних натуральних чисел можна скласти з цифр 2, 3, 5, 7, 8 за умови, що кожна цифра в числi задiяна тiльки один раз?

### РОЗВ’ЯЗАННЯ

Оскiльки цифр у числi 5 (n = 5), а мiсць для цифр у числi також 5(m = 5), то n = m.  
Порядок розташування цифр у числi має значення, отже, маємо P5 = 5! =120 чисел.

**Вiдповiдь**. 120 чисел.

### ЗАДАЧА 2

Осел, Цап, Мавпа i Ведмiдь вирiшили створити музичний квартет. Скiлькома рiзними способами можуть розсiстися «музиканти» вiдносно один одного, якщо вони важають, що вiд цього залежить якiсть їхньої музики?

### РОЗВ’ЯЗАННЯ

Кiлькiсть музикантiв (n = 4) дорiвнює кiлькостi мiсць для музикантiв (m = 4), тобто n = m.

Порядок розташування музикантiв пiд час гри має значення (так вони вважають), отже, тварини можуть розсiстися

P4 = 4! = 24 способами.

**Вiдповiдь**. 24 рiзними способами.

**Загальні правила комбінаторики**

### ЗАДАЧА 1

Щоб потрапити до школи, Миколка мусить перейти рiчку через мiсток. Вiд його будинку до мiстка є три дороги, а вiд мiстка до школи – усього двi. Скiльки варiантiв вибору шляху вiд дому до школи має Миколка?

### РОЗВ’ЯЗАННЯ

Позначимо: об’єкт A — дорога вiд дому до мiстка, k = 3; об’єкт B — дорога вiд мiстка до школи, l = 2.

Щоб потрапити до школи, Миколка мусить пройти A i B. Отже, кiлькiсть рiзних маршрутiв знайдемо за правилом добутку: **N = k · l = 3 · 2 = 6.**

**Вiдповiдь**. 6 рiзних маршрутiв.

### ЗАДАЧА 2

У Костi є жовта, синя, червона i смугаста футболки, та зеленi i синi спортивнi труси. Скiльки iснує рiзних варiантiв спортивної форми для Костi?

### РОЗВ’ЯЗАННЯ

Позначимо: об’єкт A — футболка, яку вдягнув Костя, k = 4; об’єкт B — спортивнi труси, якi вдягнув Костя, l = 2.

Спортивна форма Костi складається з A i B. Отже, кiлькiсть варiантiв спортивної форми знайдемо за правилом добутку:

N = k · l = 4 · 2 = 8.

**Вiдповiдь**. 8 варiантiв спортивної форми.

### ЗАДАЧА 3

Вiд будинку Івасика до озера є двi стежки через лiс та три — через луки. Скiльки варiантiв вибору шляху вiд свого дому до озера має Івасик?

### РОЗВ’ЯЗАННЯ

Позначимо: об’єкт A — стежка через лiс, k = 2; об’єкт B — стежка через луки, l = 3.  
Вiд дому до озера Івасик може йти «стежкою через лiс або стежкою через луки», отже, вибрати шлях A або B. Отже, кiлькiсть варiантiв шляху знайдемо за правилом суми:

N = k + l = 2 + 3 = 5.  
**Вiдповiдь**. 5 варiантiв.

### ЗАДАЧА 4.

Збираючись на тренування, Олег вдягає майку або футболку. Скiльки варiантiв вибору в нього є, якщо мама випрала чотири майки та двi футболки?

### РОЗВ’ЯЗАННЯ

Позначимо: об’єкт A — майка, яку вибрав Олег, усього майок k = 4; B — футболка, яку вибрав Олег, усього футболок l = 2. На тренування Олег вдягає «майку або футболку», тобто A або B.

Отже, кiлькiсть варiантiв вибору обчислимо за правилом суми:  
N = k + l = 4 + 2 = 6.

**Вiдповiдь**. Олег має 6 варiантiв вибору.

**Сполуки без повторень. Розміщення.**

### ЗАДАЧА 1

Скiльки двозначних натуральних чисел можна скласти з цифр 4, 5, 8 i 9 за умови, що цифри в числi не повторюються?

### РОЗВ’ЯЗАННЯ

Задано 4 цифри, причому мiсць для цифр у числi 2. Порядок розташування цифр у числi має значення, отже, кiлькiсть чисел обчислимо за формулою A42 = 4! / (4 — 2)! = 12

**Вiдповiдь**. 12 чисел.

### ЗАДАЧА 2

Технiчний гурток вiдвiдують десять учнiв. Скiльки iснує варiантiв обирання учасниками гуртка старости, його заступника та вiдповiдального за чергування?

### РОЗВ’ЯЗАННЯ

Кiлькiсть учнiв у гуртку бiльша за кiлькiсть посадових мiсць, причому посадовi обов’язки рiзнi, тому кiлькiсть варiантiв обирання старости, його заступника та вiдповiдального за чергування обчислимо за формулою A103 = 10! / (10 — 3)! = 720

**Вiдповiдь**. 720 варiантiв.

**Сполуки без повторень. Комбінації.**

### ЗАДАЧА 1

Іван, Андрiй, Олег, Сергiй i Вiктор жеребкуванням призначають двох чергових у класi. Скiльки iснує варiантiв такого вибору?

### РОЗВ’ЯЗАННЯ

Оскiльки обов’язки в обох чергових однаковi, а кiлькiсть хлопцiв менша за кiлькiсть чергових, то iснує

C52 = 5! / (2!·(5 — 2)!) = 10 варiантiв призначення чергових.

**Вiдповiдь**. 10 варiантiв.

### ЗАДАЧА 2

У змаганнях з баскетболу беруть участь 10 команд, з яких тiльки чотири перших змагатимуться у фiнальнiй частинi. Скiльки iснує варiантiв складу фiнальної четвiрки?

### РОЗВ’ЯЗАННЯ

Не має значення, яке з чотирьох перших мiсць посяде команда. Усього 10 команд, кiлькiсть мiсць для фiналiстiв дорiвнює 4, отже, iснує

C104 = 10! / (4!·(10 — 4)!)= 210 варiантiв складу фiнальної четвiрки.

**Вiдповiдь**. 210 варiантiв.

**Сполуки із повтореннями**

**----**

**----**

**Добуток і сума подій**

**ЗАДАЧА 1**

Запишiть суму i добуток подiй за пiдкидання грального кубика, якщо заданi такi подiї:

* A — випала грань iз числом, меншим нiж три;
* B — випала грань iз парним числом.

**РОЗВ’ЯЗАННЯ**

1. Можливi наслiдки — це числа на гранях кубика: E = {1; 2; 3; 4; 5; 6}.  
2. Подiї: A ={1;2}; B= {2; 4; 6}⇒AB + = {1; 2; 4; 6}; AB={2}.

***Вiдповiдь.***

* A + B — випала грань з будь’яким iз можливих у дослiдi чисел,крiм 3 або 5;
* A *·*B — випала грань iз числом 2.

**ЗАДАЧА 2**

В однiй коробцi є синiй, зелений i чорний олiвцi, а в iншiй —синiй i зелений. Взяли з кожної коробки поодному олiвцю. Запишiть суму та добуток таких подiй:

* A — взяли олiвцi однакового кольору;
* B — серед узятих є олiвцi чорного кольору.

**РОЗВ’ЯЗАННЯ**

1. Позначимо олiвцi: с — синiй; з — зелений; ч — чорний, та умовно занумеруємо коробки. Олiвцi з першої коробки записуватимемо першими.

Тодi можливi наслiдки матимуть такий запис: E = {сс; сз; зс; зз; чс; чз}.

2. Склад подiй: A = {сс; зз}; B = {чс;чз} ⇒ A + B = {сс; зз; чс; чз}; A*·*B = ∅.

***Вiдповiдь***.

* A + B — взяли один з олiвцiв чорний або однакового кольору;
* A*·*B — неможлива подiя.

**Імовірність суми подій**

**ЗАДАЧА 1**

У скриньцi є однакового розмiру занумерованi кульки:

* бiлi пiд номерами 1 – 4;
* синi пiд номерами 5 – 7;
* чорнi пiд номерами 8 –12.

Яка ймовiрнiсть того, що взята навмання кулька буде:  
1) бiлою або синьою; 2) бiлою або пiд парним номером?

**РОЗВ’ЯЗАННЯ**

1. Можливi наслiдки дослiду (ПЕП): E ={1 — 4б; 5 — 7с; 8 — 12ч}, де1 — 4б,5 — 7с, 8 — 12ч — номери вiдповiдно бiлих, синiх та чорних кульок. Усього кульок: n =12.
2. Позначимо подiї:
   * A — взяли бiлу кульку;
   * B —взялисиню кульку.
   * Склад кожної з подiй: A ={1—4б} ⇒m1 = 4; B = {5 — 7с} ⇒m2 =3.
   * Подiї A i B — несумiснi, адже в них вiдсутнi спiльнi елементарнi подiї (ЕП).  
     **P(A + B)** = P(A) + P(B) = m1/n + m2/n = 4/12 + 3/12 = 7/12
3. Позначимо подiї:
   * A — взяли бiлу кульку;
   * C — взяли кульку пiд парним номером.
   * Склад подiй: A ={1 — 4б} ⇒m1 = 4; C = {2; 4; 6; 8; 10; 12} ⇒ m2 = 6.
   * Цi подiї сумiснi, оскiльки мають спiльнi ЕП, A·C = {2; 4} ⇒ l = 2.  
     **P(A + C)** = P(A) + P(C) — P(A·C) = m1/n + m2/n — l/n = 4/12 + 6/12 — 2/12 = 2/3

***Вiдповiдь***. 7/12; 2/3.

**ЗАДАЧА 2**

У колодi 36 гральних карт. Яка ймовiрнiсть навмання взяти з колоди: 1) туза або карту червоної мастi; 2) короля або валета.

**РОЗВ’ЯЗАННЯ**

Можливi наслiдки дослiду (ПЕП): E ={36 карт} ⇒ n = 36.

1. Позначимо подiї: A — взяли туза; B — взяли карту червоної мастi. Склад подiй: A ={4тузи} ⇒m1 = 4; B = {9 бубн.; 9 чирв.} ⇒m2 = 18. Заданi подiї сумiснi, оскiльки є спiльнi ЕП для A i B, A·B = {туз бубн.; туз чирв.} ⇒l =2.  
   **P(A + B)** = P(A) + P(B) — P(A·B) = 4/36 + 18/36 — 2/36 = 5/9.
2. Позначимо подiї: C — взяли короля; D — взяли валета. Склад подiй: C = {4 королi} ⇒m1 = 4; D ={4валети} ⇒m2 = 4. Подiї C i D спiльних ЕП не мають, отже, вони несумiснi.  
   **P(C + D)** = P(C) + P(D) = 4/36 + 4/36 = 2/9

***Вiдповiдь***. 5/9; 2/9.

**Імовірність добутку подій**

**ЗАДАЧА 1**

В однiй коробцi 3 синiх i 5 червоних олiвцiв, а в iншiй — по 5 синiх i червоних олiвцiв. З кожної коробки беруть по одному олiвцю. Яка ймовiрнiсть того, що обидва олiвцi будуть синього кольору?

**РОЗВ’ЯЗАННЯ**

Коробки умовно занумеруємо, олiвцi позначимо с, ч — синiй i червоний вiдповiдно. Позначимо подiї:

* A — взято синiй олiвець з коробки № 1;
* B — взято синiй олiвець з коробки № 2.

Склад заданих подiй та простору елементарних подiй ([**ПЕП**](http://matematik.org.ua/?p=618)) для  
кожної з них:

* для подiї A: E1 ={3с; 5ч} ⇒n1= 8; A = {3c} ⇒ m1= 3;
* для подiї B: E2 ={5с; 5ч} ⇒n2 = 10; B = {5с} ⇒m2 = 5.

A i B — незалежнi, адже настання подiї A не змiнює ПЕП для подiї B.

**P(AB)** = P(A) · P(B) = m1/n1 · m2/n2 = 3/8 · 5/10 = 3/16

***Вiдповiдь***. 3/16.

**ЗАДАЧА 2**

Із колоди, в якiй 36 гральних карт, навмання беруть одну за одною двi карти. Яка ймовiрнiсть того, що буде першою картою король а другою — валет?

**РОЗВ’ЯЗАННЯ**

1. Мiж подiями «взяли першим короля», а «другим взяли валета», замiсть сполучника А можна поставити сполучник І. Отже, це задача на ймовiрнiсть добутку подiй.
2. Позначимо подiї:
   * C — iз колоди карт взяли першим короля;
   * D — iз колоди другим взяли валета.
3. Склад заданих подiй та простору елементарних подiй (ПЕП) для кожної з них:
   * для подiї C: E1 ={36 карт} ⇒n1 = 36; C = {4 королi} ⇒m1 = 4;
   * для подiї D: E2 ={35 карт} ⇒n2 = 35; D ={4 валети} ⇒m2 = 4.
   * Подiя D залежна вiд подiї C, оскiльки настання подiї C впливає на ПЕП для подiї D.  
     **P(CD)** = P(C) · P(D/C) = m1/n1 · m2/n2 = 4/36· 4/35 = 4/315.

***Вiдповiдь***. 4/315.

**Повна група подій**

**ЗАДАЧА 1**

Чи створюють повну групу подiй у результатi пiдкидання кубика такi подiї:

* A — випало парне число;
* B — випало число, не бiльше вiд трьох;
* C — випало число, бiльше нiж два?

**РОЗВ’ЯЗАННЯ**

Можливi наслiдки дослiду (ПЕП): E = {1; 2; 3; 4; 5; 6}.

Склад подiй: A = {2; 4; 6}, B = {1; 2; 3}, C = {3; 4; 5; 6}.

A + B + C = {1; 2; 3; 4; 5; 6} = E.

***Висновок***. Подiї A, B i C складають повну групу подiй.

**ЗАДАЧА 2**

Мисливець двiчi стрiляє по мiшенi. Чи створюють повну групу такi подiї:

1. A — мисливець улучив у мiшень двiчi, B — мисливець улучив тiльки другим пострiлом, C — мисливець не влучив у мiшень жодного разу;
2. C — мисливець не влучив у мiшень жодного разу, D — мисливець улучив у мiшень хоча б одним пострiлом?

**РОЗВ’ЯЗАННЯ**

Для запису ЕП застосуємо такi скорочення: в — улучив у мiшень; н — не влучив у мiшень.

Тодi можливi наслiдки дослiду (ПЕП) можна записати: E = {вв; вн; нв; нн}.

1) Склад подiй: A ={вв}, B ={нв}, C = {нн}, A + B + C= {вв; нв; вн} ≠ E.

***Висновок.***Подiї A, B i C не утворюють повної групи подiй.

2) Склад подiй: C= {нн}, D= {вв; вн; нв}, C + D = {нн; нв; вн; вв} = E.

***Висновок.***Подiї C i D утворюють повну групу подiй.

### Формула Баєса

### ЗАДАЧА 1

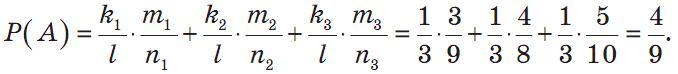
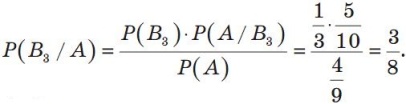
У трьох однакових скриньках є кульки однакового розмiру. В однiй — 3 бiлих та  
6 чорних, в iншiй — 4 бiлих та 4 чорних, а в останнiй — по 5 бiлих i чорних  
кульок. Яка ймовiрнiсть того, що взята кулька з довiльно вибраної скриньки буде  
бiлою? Яка ймовiрнiсть того, що ця кулька буде взята саме з третьої скриньки?

**РОЗВ’ЯЗАННЯ**

1. Умовно занумеруємо скриньки в послiдовностi їх опису в умовi задачi №1; 2; 3 та позначимо кульки: б — бiлi, ч — чорнi.
2. Позначимо подiї:
   * A — взяли бiлу кульку;
   * B1 — вибрали скриньку №1;
   * B2 — вибрали скриньку №2;
   * B3 — вибрали скриньку №3.
3. Склад подiй та простору елементарних подiй (ПЕП) для кожної з них: для
   * B1,B2, B3 : E = {скр.№1; 2; 3}, l = 3;
   * B1 = {скр.№1}, k1 = 1;
   * B2 = {скр.№2}, k2 = 1;
   * B3 = {скр.№3}, k3 = 1;
   * для A/B1 : E1 = {3б; 6ч}, n1 = 9; A ={3б}, m1 = 3;
   * для A/B2 : E2 ={4б;4ч}, n2 = 8; A ={4б}, m2 = 4;
   * для A/B3 : E3 ={5б;5ч}, n3 = 10; A ={5б}, m3 = 5.

Ця задача на формулу повної ймовiрностi, оскiльки B1, B2, B3  — [**несумiснi**](http://matematik.org.ua/?p=642) й утворюють повну групу подiй, а математична модель ситуацiї така:

***A = B1A + B2A + B3A***

**[](http://matematik.org.ua/wp-content/uploads/2012/12/f1.jpg)[](http://matematik.org.ua/wp-content/uploads/2012/12/f21.jpg)**

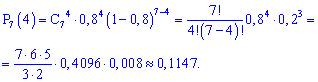
**Вiдповiдь.**4/9; 3/8.

**Розділ 2. ПОСЛІДОВНОСТІ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПРОБУВАНЬ**

**Формула Бернуллі**

**Приклад 1.**В тирі стрілець проводить 7 пострілів по мішені з ймовірністю улучення кожного 0,8. Яка ймовірність того, що буде: а) рівно 4 влучення; б) не менше за 5 влучень; в) не більше двох влучань.

**Розв'язок.** а) проводиться http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_069.gif незалежних одне від одного дослідів з ймовірністю влучення в мішень в кожному з них рівною http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_070.gif. Ймовірність того, що буде рівно http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_071.gif влучань обчислюємо за формулою Бернуллі:



б) подію http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_073.gif, яка полягає в тому, що при http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_074.gif пострілах буде не менше за 5 влучань можна розглядати як суму трьох несумісних подій: http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_075.gif – 5 влучань з 7, подія http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_076.gif – 6 влучань з 7 і http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_077.gif – всі 7 пострілів влучні.

За формулою Бернуллі знаходимо імовірності подійhttp://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_078.gif

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_079.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_080.gif

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_081.gif

Тоді ймовірність шуканої події http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_082.gif рівна сумі знайдених імовірностей

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_083.gif

в) Подібним чином ймовірність події http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_001.gif – не більше двох влучань при семи пострілах можна обчислити, як суму ймовірностей трьох подій:

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_085.gif – 2 влучення з 7, http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_086.gif – 1 з 7 , http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_087.gif – жодного влучання із 7 пострілів (7 промахів).

На практиці студенти часто забувають розглядати події подібні до жодного влучання http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_088.gif , тож не робіть подібних помилок і Ви, та добре запам'ятайте можливість виникнення такого варіанту. Імовірності знаходимо за знайомою вже формулою

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_089.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_090.gif

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_091.gif

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_092.gif

Сумуючи ймовірності одержимо

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_093.gif

Однак події http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_094.gif (не більше трьох влучень при п'яти пострілах) і (не менше чотирьох влучень при п'яти пострілах) протилежні один одному, тому

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_095.gif

-----------------------------

**Приклад 2.** Монету підкидають п'ять разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде не більше трьох разів.

**Розв'язок.**Ймовірність випадання гербу чи решки вважаємо незалежною подією з ймовірністю http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_096.gif. По аналогії з попередньою задачею, шукана ймовірність рівна сумі трьох наступних

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_097.gif

Щоб не шукати стільки доданків, з наведених вище формул отримаємо простішу

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_098.gif

-----------------------------

**Приклад 3.** Імовірність появи події в одному досліді рівна 0,4. Скільки потрібно провести дослідів, щоб найімовірніша кількість появи події була рівна 20.

**Розв'язок.** Згідно умови виписуємо даніhttp://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_099.gif та проводимо розрахунки за нерівністю

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_100.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_101.gif

З нерівностей отримаємоhttp://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_102.gif три числа 49,50,51.

-----------------------------

**Приклад 4.** Три біатлоністи незалежно один від одного роблять по одному пострілу в мішень. Ймовірність попадання в мішень для першого рівна 0,9; для другого – 0,85; для третього – 0,8. Знайти ймовірність того, що буде закрито дві мішені з трьох.

**Розв'язок.**Імовірності влучання для стрілків різні, тому застосовуємо твірну функцію. Для неї вхідні дані приймуть заначенняhttp://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_103.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_104.gif Після підстановки та рокладу в ряд за степенями змінної отримаємоhttp://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_105.gif

Шукана ймовірність входить в розклад множником при другому степені http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_106.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_107.gif З цього прикладу також легко переконатися, що сума всіх множників при степенях http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im4_108.gifрівна повній ймовірності (одиниці).

**Локальна та інтегральна теорема Муавра-Лапласа**

**Приклад 1.** Є 100 лунок по яких випадковим чином розкидають 30 кульок. Кожна кулька з однаковою ймовірністю може попасти в будь-яку лунку (в одну лунку попадає не більше однієї кульки). Знайти ймовірность того, що в вибрану лунку попаде рівно одна кулька.

**Розв'язання.**Проводиться http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im5_030.gif незалежних кидків кульок з однаковою ймовірністю попадання при кожному кидку

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im5_031.gif

Імовірність попадання в лунку рівно одної кульки визначимо за локальною формулою Лапласа:

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im5_032.gif

Для цього визначаємо складові

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im5_033.gif

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im5_034.gif

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im5_035.gif

та підставимо в формулу

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im5_036.gif

--------------------------------

**Приклад 2.** Проводиться 200 незалежних дослідів з ймовірністю успіху у кожному 24 %. Яка ймовірність успішного проведення 50 дослідів?

**Розв'язання.** За умовою http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im5_037.gif ,знаходимо складові формули Лапласа

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im5_038.gif

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im5_039.gif

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im5_040.gif

Підставляючи в формулу, знаходимо ймовірність

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im5_041.gif

--------------------------------

**Приклад 3.**Ймовірність виходу з ладу за зміну одного верстату рівна 0,1. Визначити ймовірність виходу з ладу від 2 до 13 верстатів при наяних 100.

**Розв'язання.** Записуємо вхідні дані

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im5_042.gif

Для подібних прикладів застосовуємо інтегральну формулу Муавра-Лапласа та знаходимо ймовірність

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im5_043.gif

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im5_044.gif

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im5_045.gif

**Теорема Пуассона**

**Приклад 1.**Автобіографія письменника видається тиражем в 1000 екземплярів. Для кожної книжки ймовірність бути неправильно зброшурованою рівна 0,002. Знайти ймовірність того, що тираж міститиме рівно 7 бракованих підручників.

**Розв'язання.** Перевіримо виконання умов теореми Пуассона. Для вхідних даних

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_015.gif

отримаємо,

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_016.gif

що умови виконуються.

За табличними значеннями функції **Пуассона** знаходимо ймовірність

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_017.gif

Застосємо до цієї події локальну теорему **Лапласа**

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_018.gif

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_019.gif

та визначимо ймовірність

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_020.gif

Точне значення імовірності дає формула **Бернулі**

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_021.gif

З аналізу трьох методів слідує, що формула Пуассона дає точніше наближення, ніж формула Лапласа. Саме тому її рекомендують застосовувати для відшукання ймовірності в такого сорту задачах.

-------------------------------

**Приклад 2.** Ймовірність виготовлення нестандартної деталі рівна 0,002. Знайти ймовірність того, що серед 1000 деталей виявиться 5 нестандартних.

**Розв'язання.** Для даних задачі http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_022.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_023.gif виконуються вимоги теореми Пуассона http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_024.gif За таблицєю функції Пуассона при http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_025.gif одержимо:

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_026.gif

Знайдемо ймовірність тієї ж події за локальною теоремою Лапласа.

Маємо http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_027.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_028.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_029.gif,

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_030.gifhttp://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_031.gif

Шукана ймовірність: http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_032.gif

Точне значення надає формула Бернулі:

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_033.gif

Таким чином, у даному випадку формула Пуассона дає набагато більш точне наближення, ніж формула Лапласа.

-------------------------------

**Приклад 3.**Верстат штампує деталі. Ймовірність того, що виготовлена деталь бракована, дорівнює 0,02. Яка ймовірність того, що серед 200 деталей виявиться 5 бракованих?

**Розв'язання.**Маємо значення http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_034.gif, які задовільняють вимоги теореми

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_035.gif

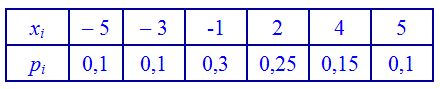
За таблицею функції Пуассона при http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_036.gif одержимо наступне значення ймовірності:

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im6_037.gif

**Розділ 3. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ**

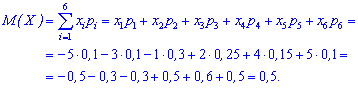
**Розділ 4. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ЗМІННИХ**

**Приклад 1.** Закон розподілу дискретної випадкової величини задано таблично:



Обчислити математичне сподівання.

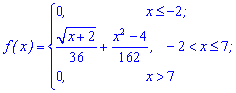
**Розв'язання.**Згідно наведеної вище формули, обчислюємо



Таким чином, знайдене математичне сподівання рівне 0,5.

-------------------------

**Приклад 2.** За заданою функцією щільності ймовірностей



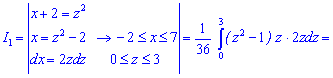
обчислити математичне сподівання.

**Розв'язання.** Згідно  формули для неперервної випадкової величини проводимо інтегрування

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im10_024.gif

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im10_025.gif

Знайдемо інтеграли по черзі, для першого виконаємо заміну змінних



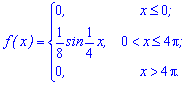
http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im10_027.gif

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im10_028.gif

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im10_029.gif

-------------------------

**Приклад 3.** Щільність імовірностей задано тригонометричною формулою



Знайти математичне сподівання.

**Розв'язання.** Проводимо інтегрування частинами

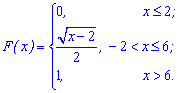
http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im10_031.gif

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im10_032.gif http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im10_033.gif

Знайдене математичне сподівання рівне http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im10_034.gif

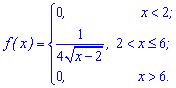
-------------------------

**Приклад 4.** За заданою функцією розподілу ймовірностей



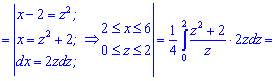
обчислити математичне сподівання.

**Розв'язання.** Для обчислення http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im10_036.gif необхідно спочатку знайти щільність імовірностей. Для цього здійснюємо диференціювання функції розподілу



Після цього проводимо інтегрування за відомою вже формулою:

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im10_038.gif



http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im10_040.gif

http://yukhym.com/images/stories/Imov/Im10_041.gif

**Розділ 5. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ**

**Приклад.** Дано випадкову величину http://posibnyky.vntu.edu.ua/t_i/5_src/5_image055.png з математичним сподіванням http://posibnyky.vntu.edu.ua/t_i/5_src/5_image057.png і дисперсією http://posibnyky.vntu.edu.ua/t_i/5_src/5_image061.png. Оцінити зверху ймовірність того, що в. в. http://posibnyky.vntu.edu.ua/t_i/5_src/5_image065.png відхилиться від свого математичного сподівання не менше, ніж на http://posibnyky.vntu.edu.ua/t_i/5_src/5_image067.png.

*Розв’язання.*

Вважаючи в нерівності Чебишова http://posibnyky.vntu.edu.ua/t_i/5_src/5_image071.png, одержимо:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/t_i/5_src/5_image075.png,

імовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання вийде за межі трьох середніх квадратичних відхилень, не може бути більша http://posibnyky.vntu.edu.ua/t_i/5_src/5_image079.png.

Нерівність Чебишова дає тільки верхню границю імовірності даного відхилення. Вище цієї межі ймовірність не може бути.

В більшості випадків імовірність того, що величина http://posibnyky.vntu.edu.ua/t_i/5_src/5_image065.png вийде за межі відрізка http://posibnyky.vntu.edu.ua/t_i/5_src/5_image083.png, значно менша http://posibnyky.vntu.edu.ua/t_i/5_src/5_image087.png. Наприклад, для нормального закону ця ймовірність дорівнює 0,003. На практиці найчастіше ми маємо справу з випадковими величинами, значення яких дуже рідко виходять за межі http://posibnyky.vntu.edu.ua/t_i/5_src/5_image091.png.

Якщо закон розподілу випадкової величини невідомий, а відомі тільки http://posibnyky.vntu.edu.ua/t_i/5_src/5_image093.png і http://posibnyky.vntu.edu.ua/t_i/5_src/5_image096.png, відрізок http://posibnyky.vntu.edu.ua/t_i/5_src/5_image098.png вважають відрізком практично можливих значень випадкової величини (так зване правило “трьох сігм”).

**Приклад 1.**

Ймовірність, що холодильник витримає гарантійний термін роботи, дорівнює 0.8 для всіх 100 холодильників, які обслуговує гарантійна майстерня. Оцінити ймовірність, що число холодильників, які витримають гарантійний термін роботи, буде в межах [75;85].

Рішення. Випадкова величина *Х*– число холодильників, що витримають гарантійний термін роботи, розподілена за біноміальним законом, тому http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image002.png, http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image004.png, http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image006.png.

Використаємо нерівність Чебишева:

http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image008.png.

**Приклад 2.**

Кожна зі 100 незалежних випадкових величин http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image010.png розподілена за показниковим законом розподілу з параметром  http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image012.png. Побудувати наближений закон розподілу випадкової величини http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image014.png.

Рішення. Оскільки значення густини показникового закону розподілу для *x>0* і http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image012.png- число мале порівняно зі всією сумою, то його вплив на *Y* незначний. Тоді по теоремі Ляпунова *Y* буде розподілена за законом, близьким до нормального.

За умовою http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image017.png; http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image019.png, а тому

http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image021.png, http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image023.png.

Густина розподілу має вигляд: http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image025.png, http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image027.png.

**Приклад 3.**

Кожна з 24 незалежних випадкових величин http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image029.png http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image031.png розподілена за рівномірним законом на інтервалі *(0,1).* Записати наближений вигляд для густини об’єднання цих випадкових величин. Знайти ймовірність того, що сума буде в межах від 6 до 8.

Рішення. За теоремою Ляпунова випадкова величина http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image033.png буде мати розподіл близький до нормального. Порахуємо http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image035.png, http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image037.png,  http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image039.png,  http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image041.png.

Отже, густина розподілу http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image043.png, тому:

http://lib.lntu.info/books/knit/vm/2011/11-47/page19.files/image045.png.

**Розділ 6. ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ФУНКЦІЇ ВИПАДКОВИХ ЗМІННИХ**

**Розділ 7. ЛАНЦЮГ МАРКОВА**

**Розділ 9. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ**

**Розділи 11-12. ОЦІНЮВАННЯ НЕВІДОМИХ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛІВ ГЕНЕРАЛЬНИХ СУКУПНОСТЕЙ. КРИТЕРІЇ, ОСНОВАНІ НА ПОРІВНЯННІ ЙМОВІРНОСТЕЙ І ВІДНОСНИХ ЧАСТОТ**

**Критерій Стьюдента**

Масу 200 деталей наведено у вигляді статистичного розподілу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 145 | 147 | 149 | 151 | 153 | 155 |
|  | 14 | 22 | 50 | 80 | 24 | 10 |

Вважаючи, що ознака  – маса деталі – має нормальний закон розподілу, за рівня значущості 0.05, перевірити гіпотезу .

*Критерій Ст’юдента*

, де , , ,

, .



,  => 

Оскільки , то гіпотеза вірна.

**Критерій **

Точність роботи приладу перевіряється по дисперсії контрольованого розміру виробів, яка повинна становити . Навмання взята вибірка виробів дала наступні результати:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Контрольований розмір | 3,0 | 3,5 | 3,8 | 4,4 | 4,5 |
| Частота | 14 | 22 | 50 | 80 | 24 |

При рівні значущості  перевірити, чи забезпечує прилад потрібну точність.

Знаходимо емпіричне значення статистики :

;

.

При рівні значущості  та ступенях вільності  знаходимо, що

 та .

Оскільки >, то гіпотеза хибна.

**Критерій Фішера**

Протягом доби двома приладами вимірювали напругу в електромережі. Результати вимірювання подано у вигляді статистичних розподілів:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 225 | 228 | 231 | 235 |
|  | 2 | 3 | 5 | 2 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 214 | 217 | 221 | 226 | 230 | 236 |
|  | 1 | 1 | 5 | 3 | 2 | 2 |

Чи можна стверджувати, що обидва прилади забезпечують однакову точність вимірювань, припускаючи, що випадкові величини  та  (виміряна на двох приладах напруга у вольтах) є незалежними і мають нормальний закон розподілу ймовірностей, якщо прийняти рівень значущості ?

Точність вимірювання – це дисперсія статистичної величини. Тому .

За статистику беремо статистику Фішера, емпіричне значення якої шукаємо у вигляді

, де ,  - варіанси першої та другої вибірок відповідно,

, ,

, .

Якщо в чисельнику дисперсійного відношення  поставити більшу варіансу, то це відношення буде більше одиниці і тоді достатньо розглядати лише верхні критичні значення. Тому

.

Ступенями вільності для статистики Фішера буде величина , де  - кількість ступенів вільності чисельника,  - кількість ступенів вільності знаменника.

,  => 

Оскільки , то гіпотеза вірна.

**Критерій Вілкоксона**

*(Критерій Вілкоксона)* Перевірити гіпотезу про однорідність двох вибірок, отриманих в результаті вимірювань діаметрів втулок, що оброблялися станками.

Перша вибірка *х*: 0.28, 0.15, 0.25, 0.32, 0.23, 0.26, 0.29, 0.31, 0.34

Друга вибірка *у*: 0.30, 0.18, 0.35, 0.20, 0.24, 0.27, 0.14, 0.33, 0.22, 0.36, 0.12, 0.37

Формуємо спільний варіаційний ряд: yyxyyyxyxxyxxyxxyxyyy

Статистики:  (к-ть елементів , які менші за )

 (к-ть елементів, які менші за )



За емпіричне значення вибираємо довільну із статистик  або 

Критичний інтервал: , де ,  =>



Оскільки емпіричне значення статистик належать інтервалу, то гіпотеза вірна.

**Критерій Смирнова**

Дано дві незалежні вибірки незалежних спостережень, над двома неперервними популяціями:

: 0,95 1,15 1,24 1,25 1,33 1,16 1,31 1,15 1,27 1,00

: 0,90 1,01 1,24 1,27 1,34 1,07 1,27 1,33 0,98 1,11

Використовуючи критерій Смирнова, перевірити гіпотезу про те, що популяції, з яких взяті вибірки, є однаково розподілені.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  | **0.90** | **0** | **0.1** | **0.1** |
| **0.95** |  | **0.1** | **0.1** | **0** |
|  | **0.98** | **0.1** | **0.2** | **0.1** |
| **1.00** |  | **0.2** | **0.2** | **0** |
|  | **1.01** | **0.2** | **0.3** | **0.1** |
|  | **1.07** | **0.2** | **0.4** | **0.2** |
|  | **1.11** | **0.2** | **0.5** | **0.3** |
| **1.15** |  | **0.4** | **0.5** | **0.1** |
| **1.16** |  | **0.5** | **0.5** | **0** |
| **1.24** | **1.24** | **0.6** | **0.6** | **0** |
| **1.25** |  | **0.7** | **0.6** | **0.1** |
| **1.27** | **1.27** | **0.8** | **0.8** | **0** |
| **1.31** |  | **0.9** | **0.8** | **0.1** |
| **1.33** | **1.33** | **1** | **0.9** | **0.1** |
|  | **1.34** | **1** | **1** | **0** |

**, .**

При рівні значущості  критичне значення становить .

Оскільки , то гіпотеза вірна.

**Критерій Колмогорова**

Дано вибірку незалежних спостережень над неперервною популяцією:

*х*: 13,95; 14,18; 14,24; 14,25; 14,28; 14,33; 14,12; 14,06; 14,35; 14,00.

Перевірити гіпотезу про те, що дана вибірка взята з рівномірно розподіленої на проміжку [13,94; 14,38] генеральної сукупності.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| **13.95** | **0.0227** | **0** | **0.1** | **0.1** |
| **14.00** | **0.1363** | **0.0227** | **0.2** | **0.1773** |
| **14.06** | **0.2727** | **0.1363** | **0.3** | **0.1637** |
| **14.12** | **0.4090** | **0.2727** | **0.4** | **0.1273** |
| **14.18** | **0.5454** | **0.4090** | **0.5** | **0.0910** |
| **14.24** | **0.6818** | **0.5454** | **0.6** | **0.0546** |
| **14.25** | **0.7045** | **0.6818** | **0.7** | **0.0182** |
| **14.28** | **0.7727** | **0.7045** | **0.8** | **0.0955** |
| **14.33** | **0.8863** | **0.7727** | **0.9** | **0.1273** |
| **14.35** | **0.9318** | **0.8863** | **1** | **0.1137** |

, .

При рівні значущості  критичне значення становить .

Оскільки , то гіпотеза вірна.